**4/a-** $u_0 = 5 > 1,2 > \alpha \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

$\star$ Soit p un entier . Supposons que $u_p > \alpha$ ; montrons que $u_{p+1} > \alpha$ en effet

$u_p > \alpha \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(u_p) > f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow u_{p+1} > \alpha$.

**Conclusion :** $\forall n \in IN; u_n > \alpha$.

**b-** $\forall n \in IN; u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = h(u_n)$

Or $\forall n \in IN; u_n > \alpha \Rightarrow \forall n \in IN; h(u_n) < h(\alpha) = 0$

( car h est décroissante sur $]-1;+\infty[$ )

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} < u_n$

Par suite $(u_n)$ est décroissante.

**c-** $\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ est décroissante sur IN} \\ (u_n) \text{ est minorée par } \alpha \text{ sur IN} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ converge

Posons L la limite de la suite $(u_n)$.

$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue en L} \end{array}\right\} \Rightarrow$ L est solution de $f(x) = x$ ;

$\Rightarrow L = \alpha$ ( car $\alpha$ est l'unique solution de $f(x) = x$)

## EXERCICE 2

**1/a-** $\text{aff}[f(C)] = \dfrac{i(-i-1)}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = -1 = \text{aff}(B)$

$\Rightarrow f(C) = B$.

**b-** Soit $M(z) \in \zeta_{(O;1)} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

$$\text{aff}[f(M)] = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1} = \frac{z\left(\frac{1}{z}-1\right)}{z-1} = \frac{1-z}{z-1} = -1 = \text{aff}(B)$$

$\Rightarrow f(M) = B$.

**2/** $M(z)$ est un point invariant de $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \dfrac{z(\bar{z}-1)}{z-1} = z$

$$\Leftrightarrow z\left[\frac{(\bar{z}-1)}{z-1} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \frac{(\bar{z}-1)}{z-1} = 1$$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in IR$

$\Leftrightarrow M(z)$ appartient à l'axe des abscisses $(x'ox)$.

**3/a-** $A(1)$ et $B(-1) \Rightarrow (AB)$ est l'axe des abscisses

Ainsi $M_1 = S_{(AB)}[M(z)] \Leftrightarrow \text{aff}(M_1) = \bar{z}$